Über linear passive Transformationen stochastischer Prozesse. II.

J. Keller

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 24 a, 716—728 [1969]; eingegangen am 6. Februar 1969)

In this paper some further results in the theory of Linear Passive Transformations (LPT) of stochastic Processes will be given, among them a theorem on the LPT of the characteristic functional of the input-process which allows one under certain conditions to get the probability-distributions of the output-process. The theory is generalized to vector-valued stochastic processes and to processes defined by means of distributions.

Einleitung

Die Theorie der Linear Passiven Transformationen (LPT) deterministischer Funktionen, entwickelt von König und Meixner in [1], ist vom Verf. in einer vorhergehenden Arbeit [2] auf stochastische Prozesse übertragen worden. Zwei durch eine LPT verknüpfte stochastische Prozesse $x(t) \to y(t)$ nannten wir ein Linear Passives Paar Stochastischer Prozesse (LPPSP). Beispiele von physikalischen Systemen, welche sich in mathematischer Hinsicht durch ein LPPSP beschreiben lassen, sind in (I) angeführt.

In der vorliegenden Arbeit werden im 1. Kapitel einige weitere Eigenschaften des transformierten Prozesses $y(t)$ angegeben. Nach einem Satz über die asymptotische Stationarität von $y(t)$ folgt ein Satz über die LPT des Charakteristischen Funktionals (C.F.) $\varphi_x[\lambda(t)]$ des Prozesses $x(t)$. Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich grundsätzlich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $y(t)$ berechnen. Anschließend folgen zwei Bemerkungen zur LPT von Prozessen, welche durch kanonische Reihenentwicklungen gegeben sind. Im 2. Kapitel wird die Theorie der LPPSP auf solche Prozesse verallgemeinert, die durch Distributionen definiert sind. An einem einfachen Beispiel (elektrisches Netzwerk mit δ-Spannungsimpulsen) wird diese Theorie und insbesondere der Satz über die LPT des C.F. des Input-Prozesses demonstriert.

Im 3. Kapitel wird die Theorie der LPT stochastischer Prozesse für vektorwertige Prozesse formuliert. Im Anhang B sind die Definitionen aller verwendeten Funktions- und Distributionsräume zusammengestellt. Im Anhang C sind einige Eigenschaften von positiven Matrizen (s. Kapitel 3) angeführt worden. Wir bezeichnen im folgenden stets mit $\mathfrak{E} = \{\Omega(\zeta), F(\alpha, \beta, \ldots), P(\alpha)\}$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, mit $x(t) = \{x(\zeta, t)\}$ einen stochastischen Prozeß [3]. Ferner bedeuten $E_x(t)$, $R_x(t_1, t_2)$, $\sigma_x^2(t)$ Mittelwert, Korrelationsfunktion und Streuung des Prozesses $x(t)$ und

$$^{(i)}R_x^{(k)}(t, t') = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^k}{\partial t'^k} R_x(t, t'),$$

$$R_x^0(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - E_x(t_1)\, E_x(t_2).$$

Wir setzen stets voraus, daß der Operator der statistischen Mittelbildung mit dem Operator der LPT vertauschbar ist [s. z. B. Kap. 3, Formel (3.6), (3.7)]. Sätze und Formeln aus (I) werden in folgender Weise zitiert: (I; 2, B 3) bedeutet z. B. Satz B 3 aus Kapitel 2; (I; 1.2) bedeutet z. B. Formel (1.2) aus (I).

Zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen sei bezüglich aller übrigen im folgenden verwendeten Bezeichnungen auf (I) verwiesen.

1. Weitere Aussagen über die Statistik des Prozesses $y(t)$

A) Ein Satz zur asymptotischen Stationarität des transformierten Prozesses $y(t)$

V$_1$: $E_x(t) \in C^{(j)}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{E}_x^{(k)}(t)|\, dt < \infty, \quad k = 0, 1 \ldots j,\ j = 0, 1, 2.$$

[1] H. König u. J. Meixner, Math. Nachr. 19, 265 [1958]. — H. König, Arch. Math. 10, 447 [1959].

[2] J. Keller, Z. Naturforsch. 23 a, 1430 [1968] (im folgenden als [I] zitiert).

* Abkürzungen: A ... Aussage, B ... Beweis, V ... Voraussetzung.

[3] J. L. Doob, Stochastic Processes, J. Wiley & Sons, New York 1953. — W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Application, 3 ed. J. Wiley & Sons, New York 1952. — M. Loève, Probability Theory, D. van Nostrand Comp. New York 1963. — S. Karlin, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York 1968.

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

V_2: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} | {}^{(i)}R_x^{(k)}(t,t') | \, \mathrm{d}t < \infty$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | {}^{(i)}R_x^{(k)}(t,t') | \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' < \infty$,

alle $i, k = 0, 1, \ldots, j$.

Alle Integrale müssen gleichmäßig bezüglich t' konvergieren.

V_3: $E_x(t) = 0$ für $t < 0$;

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} R_x(|t_2 - t_1) & \text{für } t_1 > 0, t_2 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

V_4: $\lim\limits_{s \to \infty} \dot{P}^{(l)}(s) = 0$ für $l = 0, 1, \ldots, 2 - j$.

A_1: $\lim\limits_{t \to \infty} E_y(t) = b \int\limits_0^{\infty} E_x(t) \, \mathrm{d}t$,

A_2: $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma_y^2(t) = b^2 \iint\limits_0^{\infty} R_x^0(|s_1 - s_2|) \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2$,

A_3: $\lim\limits_{t \to \infty} R_y(t, t + \tau)$

$$= b^2 \iint\limits_0^{\infty} \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2 \, R_x(|s_2 - s_1 + \tau|) = R_y(\tau).$$

Der Satz besagt, daß sich bei LPT eines zur Zeit $t = 0$ beginnenden stationären Prozesses $x(t)$ ein Prozeß $y(t)$ ergibt, welcher für $t \to \infty$ wieder stationär ist, wenn die charakteristische Funktion $P(s)$ der LPT für $s \to \infty$ genügend stark verschwindet.

B: Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus den Sätzen (I; 2, B 3) und (I; 2, C 2) sowie der Darstellung der Korrelationsfunktion $R_y(t_1, t_2$ nach (I; 2.4).

B) Ein Satz über das charakteristische Funktional (C.F.) des Prozesses $y(t)$.

Gegeben sei ein stochastischer Prozeß $x(t)$ definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{E} = (\Omega(\zeta), F, P)$ mit $x(\zeta, t) \in C^{(j)}$ $j = -1, 0, 1, 2$ und der Eigenschaft, daß die stochastische Variable

$$\varkappa_{\lambda, x}(\zeta) = \exp i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) \, x(\zeta, t) \, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

für alle Funktionen $\lambda(t) \in D_+^{(0)}$ über $\mathfrak{E}$ meßbar ist. (Definition von $C^{(j)}$, $D_+^{(0)}$ siehe Anhang B.) Dann besitzt der Prozeß $x(t)$ ein C.F. $\varphi_x[\lambda(t)]$ definiert als Erwartungswert von $\varkappa_{\lambda, x}$[4]:

$$\varphi_x[\lambda(t)] = E(\varkappa_{\lambda, x}(\zeta)) = \int\limits_{\Omega} \mathrm{d}P(\zeta) \exp i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) \, x(\zeta, t) \, \mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Dieses Funktional existiert in vielen Fällen auch für verallgemeinerte Funktionen (z.B. δ-Funktion), welche über Folgen von Funktion $\lambda_n \in D_+^{(0)}$ definiert werden können. In diesem Fall kann man aus den Größen

$$\varphi_x\left[\sum_{k=1}^{n} \mu \, \delta(t - t_k)\right] \quad \mu_k, t_k, \ldots, \text{Const},$$

falls diese, aufgefaßt als Funktion der μ_k absolut integrierbar sind, die simultanen Wahrscheinlichkeitsdichten f_x berechnen. Unter obigen Voraussetzungen gilt dann:

$$f_x\binom{x_1 \ldots x_n}{t_1 \ldots t_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mu_1 = -\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_1 \ldots \int\limits_{\mu_n = -\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_n \left\{\exp - i \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right\} \varphi_x\left[\sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \delta(t - t_k)\right]. \tag{1.3}$$

Beispiele für stochastische Prozesse, für welche C.F. explizit angegeben werden können und für welche auch die Beziehung (1.3) gilt, sind alle unbeschränkt teilbaren Prozesse[4]. Zu ihnen gehören alle Gaußschen Prozesse, sowie alle Prozesse mit unabhängigen Zuwachstaten (Poisson-Prozeß etc.)[5]. Eine Verallgemeinerung des C.F. (1.1) für Prozesse, die über Distributionen erzeugt werden und ein Beispiel dazu, werden in Kap. 2 angegeben. Wir fragen nun nach dem C.F. $\varphi_y[\lambda(t)]$ des aus $x(t)$ durch eine strenge LPT hervorgegangenen Prozesse $y(t)$. Es gilt folgender Satz:

V_1: $x(\zeta, t) \in C^{(j)}$, V_2: $\lambda(t) \in S_+^{(j)}$ $j = -1, 0, 1, 2$.

V_3: $\varkappa_{\nu, x}(\zeta) \ldots$ meßbar über $\mathfrak{E}$ für alle $\nu(t) \in D_+^{(0)}$. D.h. $\varphi_x[\nu(t)]$ existiert für alle $\nu(t) \in D_+^{(0)}$.

A_1: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) \, \mathfrak{L}_j(t) \, x(\zeta, t) \, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\overline{\mathfrak{L}}_j(t) \, \lambda(t)) \cdot x(\zeta, t) \, dt$.

[4] A. V. Skorokhod, Russian Math. Surveys **20**, 63 [1965].

[5] A. V. Skorokhod, Stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwachsraten (Russisch) NAUKA, Moskau 1964.

Dabei ist:

$$\overline{\mathfrak{L}}_0(t)\,\lambda(t) = [i\,\mathrm{Im}\,Y(1) - \dot{P}(+0)]\,\lambda(t) + \int_0^\infty \mathrm{d}s[b + P(s) - \ddot{P}(s)]\,\lambda(t+s)\ldots\lambda(t)\in S_+^{(-1)} \text{ oder } S_+^{(0)}, \tag{1.4a}$$

$$\overline{\mathfrak{L}}_1(t)\,\lambda(t) = i\,\mathrm{Im}\,Y(1)\,\lambda(t) - a\,\dot{\lambda}(t) + \int_0^\infty \mathrm{d}s[b + P(s)]\,\lambda(t+s) - \int_0^\infty \mathrm{d}s\,\dot{\underset{\sim}{P}}(s)\,\dot{\lambda}(t+s)\ldots\lambda(t)\in S_+^{(1)}, \tag{1.4b}$$

$$\overline{\mathfrak{L}}_2(t)\,\lambda(t) = i\,\mathrm{Im}\,Y(1)\,\lambda(t) - a\,\dot{\lambda}(t) + \int_0^\infty \mathrm{d}s[b + P(s)]\,\lambda(t+s) + \int_0^\infty \mathrm{d}s[P(0) - P(s)]\,\ddot{\lambda}(t+s)\ldots\lambda\in S_+^{(2)} \tag{1.4c}$$

A$_2$: $\varphi_y[\lambda(t)]\ldots$ existiert für alle $\lambda(t)\in S_+^{(j)}$ und es gilt $\qquad \varphi_y[\lambda(t)] = \varphi_x[\overline{\mathfrak{L}}_j(t)\,\lambda(t)]$. (1.5)

Dabei sind $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ Konstante und $P(s)$ die charakteristische Funktion von $\mathfrak{L}_j(t)$.

B: Mit Hilfe von (I,1.2a, b, c) und V$_1$, V$_2$ läßt sich A$_1$ unter Verwendung von Hilfssätzen über die Vertauschung von Integral- bzw. Differentialoperatoren[6] leicht nachweisen. Da $\mathfrak{L}_j(t)\,\lambda(t)\in D_+^{(0)}$ wie aus V$_2$ und (1.4a, b, c) ersichtlich, folgt A$_2$ dann unmittelbar aus A$_1$ und V$_3$.

Der obige Satz über das C.F. des aus $x(t)$ durch eine strenge LPT hervorgegangenen Prozesses $y(t)$ gilt in einigen Fällen (z.B. für Gauß-Prozesse) auch noch dann, wenn die Testfunktion eine verallgemeinerte Funktion (z.B. δ-Funktion) ist. Genauer: gilt neben den obigen Voraussetzungen V$_1$—V$_3$ auch noch

V$_4$: $\varkappa_{\nu,x}(\zeta)\ldots$ meßbar über $\mathfrak{E}$ für alle $\nu(t) = \sum_{K=1}^{n}\mu_k\,\delta(t-t_k)$ mit $\mu_k, t_k\ldots$ Const.

$$\mathrm{V}_5\colon\quad \varphi_x\Big[\sum_k \mu_k\,\delta(t-t_k)\Big] \in \prod_{K=1}^{n} L^{(1)}(\mu_k),$$

so kann man mit Hilfe von (1.5) die simultane Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten f_y des Prozesses $y(t)$ aus dem C.F. des Prozesses $x(t)$ und den Operatoren $\overline{\mathfrak{L}}_j(t)$ nach (1.4) berechnen. Es gilt

$$f_y\binom{y_1\ldots y_n}{t_1\ldots t_n} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mu_1=-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mu_1\ldots\int_{\mu_n=-\infty}^{\infty}\Big\{\exp - i\sum_{k=1}^{n}\mu_k y_k\Big\}\,\varphi_x\Big[\overline{\mathfrak{L}}_j(t)\sum_{k=1}^{n}\mu_k\,\delta(t-t_k)\Big]. \tag{1.6}$$

Wir müssen an dieser Stelle bemerken, daß der praktische Wert von (1.6) heute noch dadurch sehr beschränkt ist, daß man für viele stochastische Prozesse (z. B. Markoff-Prozesse, die keine Gauß-Prozesse sind) die explizite Gestalt des C.F. φ_x nicht kennt (vgl.[4]). Die Anwendung von (1.5) und (1.6) auf Gaußsche Prozesse[7] liefert folgende Aussage: Die LPT eines Gaußschen Prozesses ist stets wieder ein Gaußscher Prozeß. Ist der zu transformierende Gauß-Prozeß quasi stationär ($E_x = 0$, $R_x(t_1, t_2) = R_x(|t_1 - t_2|)\cdots t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $R_x = 0\ldots$ sonst) bzw. ein Markoff-Prozeß, so ist der transformierte Prozeß im allgemeinen nicht stationär und kein Markoff-Prozeß. Bezüglich einer Anwendung dieses Satzes in der Theorie der Brownschen Bewegung sei auf[9] verwiesen.

Ein weiteres Beispiel für (1.6), wo $x(t)$ ein Poisson-Prozeß ist, wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

C) LPT von stochastischen Prozessen $x(t)$, welche kanonische Reihenentwicklungen besitzen.

Gegeben sei ein komplexwertiger stochastischer Prozeß $x(t)$ definiert über $\mathfrak{E}$ mit $x(\zeta, t)\in C^{(j)}$. Seien $V_k(\zeta)$, $k = 1,\ldots,n$ n viele komplexwertige orthogonale stochastische Variable definiert und meßbar über $\mathfrak{E}$. D.h. es gilt[10]

$$\begin{aligned} &E(V_k) = 0, && i, k = 1,\ldots,n,\\ &E(V_i V_k^*) = D_i\,\delta_{ik} && D_i\ldots\text{Const.}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dann besitzt der Prozeß $x(t)$ eine kanonische Entwicklung[8] nach den stochastischen Variablen V_k. D.h. es gilt für fast alle $\varphi\in\Omega$

$$x^0(\zeta, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k(\zeta)\,x_k^0(t) + R_{xn}(\zeta, t), \tag{1.8}$$

[6] G. M. Fichtenholz, Differential- u. Integralrechnung, Bd. II VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Ostberlin 1964, pag. 585, 686 f.

[7] siehe [4], S. 71, [8] S. 192, 285.

[8] S. V. Pugachev, Theory of Random Functions and its Application to Controll Problems, Pergamon Press New York 1965, p. 228, 238.

[9] J. Keller, Ann. Physik, im Druck.

[10] V^* ist die zu V konjugiert komplexe Größe.

wobei

$$x^0(\zeta, t) = x(\zeta, t) - E_x(t),$$

$$x_k^0(t) = \frac{1}{D_k} E(x^0(t), V_k^*), \tag{1.9}$$

$$E(|R_{xn}(t)|^2) = \sigma_x^2(t) - \sum_{K=1}^{n} D_k |x_k^0(t)|^2$$

ist. Man kann zeigen, daß der Erwartungswert des Absolutbetrages des Korrekturgliedes $R_{xn}(\zeta, t)$ bei vorgegebenen V_k und fixem n gerade dann minimalen Wert besitzt, wenn man für die Funktionen x_k^0 den Ausdruck (1.9) wählt. (Optimale Entwicklung.) Aus (1.8) folgt wegen $x^0(\zeta, t) \in C^{(j)}$, $R_{x,n}(\zeta, t) \in C^{(j)}$, daß der zu $x(t)$ linear passiv transformierte Prozeß $y(t)$ die Darstellung

$$y(\zeta, t) = E_y(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k(\zeta) y_k^0(t) + R_{yn}(\zeta, t) \tag{1.10}$$

besitzt. Dabei ist

$$y_k^0(t) = \mathfrak{L}_j(t) x_k^0(t), \qquad R_{y,n}(\zeta, t) = \mathfrak{L}_j(t) R_{xn}(\zeta, t).$$

Die Entwicklung (1.10) ist wieder kanonisch und optimal. Besitzt der Prozeß $x(t)$ eine Karhunen-Loève-Entwicklung[11] (K.L.) im Intervall $|t| \leqq T$, so gibt die gliedweise LPT dieser Reihe eine Reihendarstellung für den zu $x(t)$ linear passiv transformierten Prozeß $y(t)$. Diese Reihe für $y(t)$ ist aber im allgemeinen keine K.L.-Reihe mehr, wiewohl die in ihr auftretenden stochastischen Variablen unkorreliert sind. Es gilt der folgende Satz:

V_1: $x(\zeta, t)$, $\quad E_x(t)$, $\quad R_x(t_1, t_2) \in \bar{C}^{(j)}$

mit $t^0 = -T$ (s. Anhang B),

$$V_2: x(\zeta, t) = E_x(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta) \varphi_n(t) \ldots$$

$$\text{für} \quad |t| \leqq T. \tag{1.11}$$

Diese Reihe sei eine K.L.-Reihe. Es gilt also

$$\int_{-T}^{T} R_x(t_1, t_2) \varphi_n(t_2) \, dt_2 = \lambda_n \varphi_n(t_1),$$

$$\lambda_n > 0, \qquad |t_1| \leqq T, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\int_{-T}^{T} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) \, dt = \delta_{n,m},$$

$$R_x(t, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 \ldots |t| \leqq T,$$

$$E(a_n) = 0,$$

$$E(a_n, a_m) = \lambda_n \delta_{nm},$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} E(a_n x(t));$$

V_3: $y(\zeta, t) = \mathfrak{L}_j(t) x(\zeta, t)$ ...strenges LPPSP,

$$\text{A}: y(\zeta, t) = E_y(t) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta) \psi_n(t) \quad \ldots |t| \leqq T,$$

mit $\psi_n(t) = \mathfrak{L}_j(t) \varphi_n(t)$.

B: Zunächst gilt $\varphi_n(t) \in C^{(j)}$. Übt man den Operator $\mathfrak{L}_j(t)$ auf beide Seiten von (1.11) aus, so erhält man A. Die Vertauschung der Summe und des Operators $\mathfrak{L}_j$ ist wegen V_1 erlaubt.

Reihenentwicklungen von stochastischen Prozessen sind stets dann mit Vorteil zu verwenden, wenn die äußere Erregung aus einer deterministischen Funktion, überlagert von einem stochastischen Prozeß, besteht und dieser stochastische Prozeß quasi als Störung behandelt werden kann. Beispiele für physikalische Systeme, bei denen solche Erregungen auftreten, sind elektrische Netzwerke, in denen die thermischen Strom- bzw. Spannungsschwankungen, welche an den einzelnen Elementen des Netzwerkes auftreten, berücksichtigt werden.

2. Darstellung von LPT und LPPSP mit Distributionen

A) Allgemeine Theorie

Manche stochastischen Prozesse lassen sich mit Hilfe von Distributionen besonders einfach und übersichtlich beschreiben. Beispiel: Poisson-Impulse (siehe Ende dieses Abschnittes). Um auch sie linear passiv transformieren zu können, ist es zweckmäßig, die Theorie der LPT stochastischer Prozesse mit Hilfe des Distributionen-Begriffs[12] zu formulieren. Dies soll in diesem Kapitel geschehen. Wir bemerken zunächst, daß die linear passiven Operatoren $L_j(t)$ ($j = 0, 1, 2$), definiert durch (I,1,2a, b, c), als einparametrige Schar (Parameter t) von Distributionen aufgefaßt werden können. Dann betrachten wir von Distributionen erzeugte stochastische Prozesse und die LPT von solchen Prozessen.

[11] Siehe z.B. A. PAPOULIS, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York 1965, p. 458.

[12] Wir verstehen unter einer Distribution $T(s)$ im Sinne von L. SCHWARTZ stets einen Operator, welcher es erlaubt, jeder Funktion $\varphi(s)$ aus einer gewissen Menge Φ eine Zahl $t[\varphi]$ zuzuordnen: $\langle T, \varphi(s) \rangle = t[\varphi]$. Diese Zuordnung ist stets eindeutig linear und stetig. Das Argument s bei der Distribution bedeutet, daß sie nur auf Testfunktionen derselben Variablen s wirkt. Wir unterdrücken es, wo es entbehrlich ist. Siehe dazu:

Der im folgenden entwickelte Formalismus wird an einem Beispiel (elektrisches Netzwerk, Poisson-Spannungsimpulse) demonstriert. Die Definitionen der verwendeten Funktions- und Distributionsräume, sowie einiger weiterer Symbole (τ, δ, E ...) sind im Anhang B zusammengestellt.

Wir schreiben die LPT einer Funktion $f(t) \in C^{(j)}$ nun als Anwendung einer Distribution $L_t^{(j)}$ auf die "Testfunktion" $f(t)$:

$$\mathfrak{L}_j(t) f(t) = \langle L_t^{(j)}(s), f(s) \rangle . \tag{2.1}$$

Die Distribution $L_t^{(j)}$ läßt sich dabei schreiben als Zeittranslation einer von t unabhängigen Distribution

$$L_t^{(j)}(s) = \tau_t L^{(j)}(s) . \tag{2.2}$$

Aus (I,1.2) lassen sich unmittelbar die folgenden Darstellungen der (temperierten) Distributionen $L_t^{(j)}$ ablesen.

$$\begin{aligned} L_t^{(j)}(s) &= [i \operatorname{Im} Y(1) - \dot{P}(+0)] \delta(s-t) - a \dot{\delta}(s-t) \\ &\quad + E(t-s)[b + P(t-s) - \ddot{P}(t-s)] , \\ L_{t=0}^{(j)}(s) &\equiv L^{(j)}(s) ; \qquad j = 0, 1, 2 . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Im Falle $j = 0$ ist in diesem Ausdruck $a = 0$ zu setzen. Alle Ableitungen sind im Sinne der Distributionstheorie zu verstehen. Der eigentliche Definitionsbereich oder Träger $K_L'(t)$ von $L_t^{(j)}$ ist für alle j die Halbachse $(-\infty < s \leqq t)$; d.h. es gilt $L^{(j)} \in D_-'$. Der Anwendungsbereich von $L_t^{(j)}$ ist $C^{(j)}$. Wir bemerken noch, daß sich LPT von Funktionen $f(t) \in C^{(-1)}$ auch gemäß (I,1.2a) bzw. durch den Operator $L_t^{(0)}$ nach (2.3) darstellen lassen, wenn man verlangt, daß die Transformierte von $f(t)$ auch wieder eine Funktion aus $C^{(-1)}$ sein soll. Da $K_L'(0)$ von rechts beschränkt ist, besitzen die Distributionen für $\operatorname{Re} p > 0$ stets eine Laplace-transformierte. Sie ist definiert durch

$$\langle L^{(j)}, e^{ps} \rangle = \check{L}^{(j)}(p)$$

und ist eine positive Funktion. Darstellungen solcher Funktionen sind in (I,A1.6) angegeben worden. Der Vollständigkeit halber führen wir noch die Fourier-Transformierte $\hat{L}^{(j)}(\lambda)$ von $L^{(j)}$ an.

$$\begin{aligned} \hat{L}^{(j)}(\lambda) &= i \operatorname{Im} Y(1) - 2 i \pi \lambda (a + P(0)) \\ &\quad + b \left(- pv \frac{1}{2 \pi i \lambda} + \frac{1}{2} \delta(\lambda) \right) \\ &\quad + (1 + 4 \pi^2 \lambda^2) \hat{P}_+^*(\lambda) , \quad j = 0, 1, 2 . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Im Falle $j = 0$ ist wieder $a = 0$ zu setzen. Ferner bedeutet pv ... prinziple value (s.[13], S. 84) und $\hat{P}_+^*(\lambda)$ die konjugiert komplexe der Fourier-Transformierte (im Sinne der Distributionstheorie) von $E(s) \cdot P(s)$. Diese existiert, da $P(s)$ beschränkt ist.

Nun betrachten wir stochastische Prozesse, welche durch Distributionen erzeugt werden. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{E} = \{\Omega(\zeta), F, P\}$. Wir ordnen jedem Elementarereignis ζ eine Distribution $X(\zeta, s) \in D_-'$ zu. Diese Distributionsmenge $\{X(\zeta, s)\}$ erzeugt über die Testfunktion $\varphi(s) \in D_-$ einen stochastischen Prozeß $\{x(\zeta, t)\}$ gemäß

$$\begin{aligned} x(\zeta, t) &= \langle \tau_t X(\zeta, s), \varphi(s) \rangle \\ &= \langle X(\zeta, s), \varphi(s+t) \rangle . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Wir nennen die Menge $\{X(\zeta, s)\}$, die den Prozeß $x(t) = \{x(\zeta, t)\}$ erzeugende Distributionsmenge und $\varphi(s)$ die den Prozeß erzeugende Testfunktionen. Wegen $X(\zeta, s) \in D_-'$ ist der Träger K_x' von allen $X(\zeta, s)$ mindestens von rechts oder überhaupt beschränkt (s. Anhang B). Offenbar kann jeder stochastische Prozeß mit $x(\zeta, t) \in C^{(j)}$ $(j = -1, 0, 1, 2$ stochastische Prozeß mit

$$x(\zeta, t) \in C^{(j)} \qquad (j = -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

gemäß (2.5) durch Distributionen erzeugt werden. Durch Erweiterung der zulässigen Klassen von Distributionen und Testfunktion kann (2.5) so verallgemeinert werden, daß praktisch alle heute in der Physik und Mathematik bekannten stochastischen Prozesse in dieser Weise dargestellt werden können (s. z.B.[14, 15]). Durch statistische Mittelbildung von (2.5) kann man neue Distributionen definieren, welche den Mittelwert und die Korrelationsfunktion des Prozesses $x(t)$ erzeugen:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \int x(\zeta, t) \, \mathrm{d}P(\zeta) \\ &= \int \langle X(\zeta, s), \varphi(s+t) \rangle \, \mathrm{d}P(\zeta) \\ &\overset{\mathrm{D}}{=} \langle \bar{X}(s), \varphi(s+t) \rangle , \end{aligned} \tag{2.6}$$

[13] L. Schwartz, Mathematics for the Physical Sciences, Addison-Wesley, Publ. Comp., London 1966.

[14] A. H. Zemanian, Distribution Theory and Transform Analysis, McGraw Hill, New York 1965. — I. M. Gelfand u. G. E. Schilov, Verallgemeinerte Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964. — E. Berz, Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren, B. I. Mannheim, Bd. **122** [1967]. — L. Schwartz, Théorie des distributions, Actual. Sci. Industr. 1091 [1951], 1122 [1951].

[15] K. Urbanik, Stochastic Processes whose sample functions are distributions, Teor. Veroyatnost. i Primenen **1**, 146 [1956]. — H. O. A. Wold, Bibliography on time series and stochastic processes. MIT-Press, Cambr., Mass. 1966.

$$\begin{aligned} R_x(t_1,t_2) &= \int x(\zeta,t_1)\,x^*(\zeta,t_2)\,\mathrm{d}P(\zeta) \\ &= \int \langle X(\zeta,s_1)\,X^*(\zeta,s_2), \\ &\qquad \varphi(s_1+t_1)\,\varphi(s_2+t_2)\rangle\,\mathrm{d}P(\zeta) \\ &\stackrel{\mathrm{D}}{=} \langle \overline{X(s_1)\,X^*(s_2)}, \varphi(s_1+t_1)\,\varphi(s_2+t_2)\rangle \end{aligned} \tag{2.7}$$

($\stackrel{\mathrm{D}}{=}$ Definition).

Wir nennen $\overline{X}(s)$ die Mittelwerts- und $\overline{X(s_1)\,X^*(s_2)}$ die Korrelationsdistribution 2. Stufe des Prozesses $x(t)$. Die strenge oder gewöhnliche LPT eines gemäß (2.5) bzw. (2.6,7) durch Distributionen definierten Prozesses läßt sich nun ohne Verwendung der Testfunktion durchführen: Die erzeugende Distribution $Y(\zeta)$ des streng transformierten Prozesses $y(t)$ ist gegeben durch die Faltung von $L^{(j)}$ und $X(\zeta)$:

$$Y(\zeta) = L^{(j)} * X(\zeta)\,, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.8}$$

Wegen $X(\zeta) \in D'_-$ und $L^{(j)} \in D'_-$ existiert $Y(\zeta)$ stets und ist wieder eine Distribution aus dem Raume D'_-. Analog zu (2.5) gilt für die Realisierung $y(\zeta, t)$ des Prozesses $y(t)$:

$$y(\zeta,t) = \langle Y(\zeta,s), \varphi(s+t)\rangle\,. \tag{2.5'}$$

Die Richtigkeit von (2.8) ist unmittelbar einzusehen. Aus (2.5′) folgt mit (2.8), (2.5) und der Definitionsgleichung (2.1) die Beziehung (I,1.6):

$$\begin{aligned} y(\zeta,t) &= \langle L^{(j)}(s) * X(\zeta,r), \varphi(s+r+t)\rangle \\ &= \langle L^{(j)}(s), x(\zeta,s+t)\rangle = \mathfrak{L}_j(t)\,x(\zeta,t)\,. \end{aligned}$$

Bei gewöhnlicher LPT sind analog zu (2.8) die Mittelwerts- und Korrelationsdistributionen des Prozesses $y(t)$ gegeben durch

$$\bar{Y} = L^{(j)} * \bar{X}\,, \tag{2.9}$$

$$\overline{Y(s_1)\,Y^*(s_2)} = L^{(j)}(s_1)L^{(j)*}(s_2) * \overline{(Xs_1)X^*(s_2)}\,. \tag{2.10}$$

Wegen $X(\zeta) \in D'_-$ kann man die Laplace-Transformierten der Beziehungen (2.8—10) angeben:

$$\check{Y}(\zeta,p) = \check{L}^{(j)}(p)\,\check{X}(\zeta,p)\,, \tag{2.8a}$$

$$\check{\bar{Y}}(p) = \check{L}^{(j)}(p)\,\check{\bar{X}}(p)\,, \tag{2.9a}$$

$$\overline{Y(p_1)\,Y^*(p_2)}^{\vee} = L^{(j)}(p_1)\,L^*(p_2)\,\overline{X(p_1)\,X^*(p^))}^{\vee}\,. \tag{2.10a}$$

Ist K'_x beschränkt, so kann man außerdem noch die Fouriertransformierten der Beziehungen (2.8—10) angeben:

$$\hat{Y}(\zeta,\lambda) = \hat{L}^{(j)}(\lambda)\,\hat{X}(\zeta,\lambda)\,, \tag{2.8b}$$

$$\hat{\bar{Y}}(\lambda) = \hat{L}^{(j)}(\lambda)\,\hat{\bar{X}}(\lambda)\,, \tag{2.9b}$$

$$\widehat{\overline{Y(\lambda_1)\,Y^*(\lambda_2)}} = \hat{L}^{(j)}(\lambda_1)\,\hat{L}^{*(j)}(\lambda_2)\,\widehat{\overline{X(\lambda_1)\,X^*(\lambda_2)}}\,. \tag{2.10b}$$

Die letzte Beziehung liefert nach Anwendung auf $\varphi(\lambda_1)\,\varphi(\lambda_2)$ eine Beziehung zwischen den Spektralfunktionen der beiden Prozesse $x(t)$ und $y(t)$.

Die einfachen bzw. die simultanen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Prozesses $y(t)$ können grundsätzlich durch LPT des C.F. des Prozesses $x(t)$ gewonnen werden. Dabei ist es zweckmäßig, den Begriff des C.F. wie folgt zu verallgemeinern:

Sei $\Lambda \in E'$ eine Distribution und sei die stochastische Variable

$$\varkappa_{\Lambda,x}(\zeta) = \exp i\,\langle \Lambda(t) * X(\zeta,s), \varphi(s+t)\rangle$$

über $\mathfrak{E}$ bezüglich $P(\zeta)$ meßbar. Dann bezeichnen wir den statistischen Mittelwert von $\varkappa_{\Lambda,x}(\zeta)$ mit

$$\varphi_x[\Lambda(t)] = \int_\Omega \exp i\langle \Lambda(t) * X(\zeta,s), \varphi(s+t)\rangle\,\mathrm{d}P(\zeta) \tag{2.11}$$

und nennen ihn das C.F. des Prozesses $x(t)$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Prozesses $x(t)$ lassen sich mit (2.11) in folgender Weise schreiben:

$$f\binom{x_1 \ldots x_n}{t_1 \ldots t_n} = \prod_{i=1}^{n} F^*_{x_i}(\omega_i)\,\varphi_x\Big[\sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\delta(t-t_k)\Big]. \tag{2.12}$$

Dabei bedeutet

$$F^*_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

den inversen Fourier-Operator wirkend auf Funktionen $\alpha(\omega) \in L^{(1)}$. Analog zu (2.11) gilt für das C.F. des linear passiv transformierten Prozesses $y(t)$:

$$\varphi_y[\Gamma(t)] = \int_\Omega \exp i\langle \Gamma(t) * Y(\zeta,s), \varphi(t+s)\rangle\,\mathrm{d}P(\zeta)\,, \quad \Gamma \in E'\,. \tag{2.13}$$

wegen (2.8) folgt daher

$$\varphi_y[\Gamma] = \varphi_x[\Gamma * L^{(j)}]\,. \tag{2.14}$$

Die Faltung $\Gamma * L^{(j)}$ existiert wegen $\Gamma \in E'$ stets. Damit lassen sich grundsätzlich die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen des Prozesses $y(t)$ aus $\varphi_x[\Lambda]$ in folgender Weise berechnen:

$$f_y\binom{y_1 \ldots y_n}{t_1 \ldots t_n} = \prod_{i=1}^{n} F^*_{y_i}(\omega_i)\,\varphi_x\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n} \omega_k\,\delta(t-t_k)\Big) * L^{(j)}\Big]. \tag{2.15}$$

B) Ein Beispiel

Nun wollen wir den oben entwickelten Formalismus und insbesondere (2.15) an einem Beispiel demonstrieren. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{E}$, dessen Elementarereignisse ζ alle

Mengen von Poisson-verteilten Zeitpunkten t_i im offenen Intervall $0 < t < \infty$ sind:

$$\zeta = \{t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots\}, \qquad t_i > 0 .$$

Der Poisson-Parameter der Verteilung sei λ_0. Er gibt an, wieviele Zeitpunkte t_i im Mittel in einem Intervall der Länge 1 liegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Intervall $[0, t]$ k viele Zeitpunkte t_i liegen, ist

$$\frac{e^{-\lambda_0 t}}{k!} (\lambda_0 t)^k .$$

Die erzeugende Distribution eines über $\mathfrak{E}$ definierten stochastischen Prozesses $x(t)$ sei

$$X(\zeta, s) = X_0 \sum_i \delta(s - t_i), \qquad X_0 = \text{const.} \tag{2.16}$$

Eine spezielle Realisierung des Prozesses $x(t)$ ist daher nach (2.5) gegeben durch

$$x(\zeta, t) = X_0 \sum_i \varphi(t - t_i), \tag{2.17}$$

wo $\varphi(s) \in M$ die erzeugende Testfunktion von $x(t)$ ist. Wählt man speziell $\varphi(s) = E(s)$, so ist $x(t)$ der gewöhnliche Poisson-Prozeß. Das C.F. des Prozesses $x(t)$ ist[16]

$$\varphi_x[\lambda(t)] = \exp\{\lambda_0 \int_{t=0}^{\infty} [\exp i X_0 \int_{s=-\infty}^{\infty} \lambda(t+s)\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s - 1]\, \mathrm{d}t\} . \tag{2.18}$$

Dies gilt für alle $\lambda(t) \in S$.

Die einfache Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte von $x(t)$ ist

$$f_x\binom{x_1}{t_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda_0 \int_{t=0}^{\infty} [e^{i X_0 \mu \varphi(t_1 - t)} - 1]\, \mathrm{d}t\}\, e^{-i\mu x_1}\, \mathrm{d}\mu . \tag{2.19}$$

Die 2-simultan Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte von $x(t)$ ist

$$f_x\binom{x_1 x_2}{t_1\, t_2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mu_1=\infty}^{\infty} \int_{\mu_2=-\infty}^{\infty} \exp\{\lambda_0 \int_{t=0}^{\infty} [e^{i X_0(\mu_1 \varphi(t_1 - t) + \mu_2 \varphi(t_2 - t))} - 1]\, \mathrm{d}t\} \cdot e^{-i(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)}\, \mathrm{d}\mu_1\, \mathrm{d}\mu_2 . \tag{2.20}$$

Mittelwert und 2-Korrelationsfunktion lauten

$$E_x(t) = \lambda_0 X_0 \int_{s=0}^{\infty} \varphi(t-s)\, \mathrm{d}s, \tag{2.21}$$

$$R_x(t_1, t_2) = \lambda_0^2 X_0^2 \int_{s=0}^{\infty} \varphi(t_1 - s)\, \mathrm{d}s \int_{s'=0}^{\infty} \varphi(t_2 - s')\, \mathrm{d}s' + \lambda_0 X_0^2 \int_{s=0}^{\infty} \varphi(t_1 - s)\, \varphi(t_2 - s)\, \mathrm{d}s . \tag{2.22}$$

Somit sind die Mittelwerts- bzw. 2-Korrelationsdistribution bestimmt durch

$$\bar{X}(s) = \lambda_0 X_0 E(-s), \qquad \overline{X(s_1)\, X(s')} = \lambda_0^2 X_0^2 E(-s_1) E(-s_2) + \lambda_0 X_0^2 E(-s_1)\, \delta(s_1 - s_2) .$$

Wir betrachten im folgenden ein einfaches elektrisches Netzwerk, welches aus einer Serienschaltung eines Widerstandes R, einer Kapazität C und einer Induktivität L besteht. Auf das Netzwerk werden ab dem Zeitpunkt $t = 0$ statistische Spannungsstöße der Form

$$U = U_0 \sum_i \delta(t - t_i) \tag{2.23}$$

eingeprägt, wobei die t_i Poisson-verteilte willkürliche Zeitpunkte sind. Wir fragen nach den stochastischen Eigenschaften des Stromes $I(t)$ im Netzwerk. Zunächst bemerken wir, daß der Prozeß (2.23) die Form (2.17) mit $X_0 = U_0$, $\varphi(s) = \delta(s)$ besitzt. [Hier wird $\delta(s)$ als verallgemeinerte Funktion — definiert über eine Folge von Grundfunktion — und nicht als Distribution (d.h. als Operator) aufgefaßt.]

Das C.F. der Spannung ist nach (2.18)

$$\varphi_U[\lambda(t)] = \exp\{\lambda_0 \int_0^{\infty} (e^{i U_0 \lambda(t)} - 1)\, \mathrm{d}t\} . \tag{2.24}$$

Mittelwert und Korrelationsfunktion der Spannung sind nach (2.21, 22)[17]

$$E_U(t) = \lambda_0 U_0 ,$$
$$R_U(t_1, t_2) = U_0^2 (\lambda_0^2 + \lambda_0\, \delta(t_1 - t_2)) . \tag{2.25}$$

[16] Siehe [4], S. 71 u. [5].

Strom und Spannung im Netzwerk stehen nach der Kirchhoffschen Spannungsregel zueinander in der Beziehung

$$L\dot{J} + RJ + \frac{1}{c}\int_0^t J(t')\,\mathrm{d}t' = U(t). \qquad (2.26)$$

Die Transformation $U(t) \to J(t)$ ist eine LPT, wenn das Netzwerk für $t = 0$ leer gewesen ist, d.h. keine Energie in Form elektromagnetischer Felder enthalten hat. Dies wollen wir voraussetzen. Ferner setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß $R^2 > 4LC^{-1}$ ist. Das heißt wir beschränken uns bei der Diskussion von (2.26) auf den Dämpfungsfall. (Der Resonanz- und Schwingfall lassen sich ganz analog behandeln.)

Aus (2.26) ergibt sich

$$J(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 4LC^{-1}}}\int_{s=0}^{t} (p_1 e^{p_1(t-s)} - p_2 e^{p_2(t-s)})\, U(s)\,\mathrm{d}s \qquad (2.27)$$

mit

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} < 0. \qquad (2.28)$$

Die Admittanzfunktion $Y(p)$ und die charakteristische Funktion $P(S)$ der LPT lauten

$$Y(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + C^{-1}},$$

$$P(s) = \frac{R}{R^2 - (L + C^{-1})^2} e^{-s} + \frac{1}{\sqrt{R^2 - 4LC^{-1}}}\left\{\frac{p_1}{1-p_1^2} e^{p_1 s} - \frac{p_2}{1-p_2^2} e^{p_2 s}\right\}. \qquad (2.29)$$

(2.27) folgt auch aus (2.1) mit (2.3) ($j = 0$) unter Beachtung von (2.29), $b = 0$, $P(+0) = 0$ und $\operatorname{Im} Y(1) = 0$. (2.27) gilt nicht nur für Spannungen $U(s) \in C^{(0)}$ sondern auch für Spannungen der Form (2.23). Das C.F. des Stromes $J(t)$ kann mit Hilfe von (2.14) aus dem C.F. der Spannung nach (2.24) leicht berechnet werden. Man erhält

$$\varphi_J[\lambda(t)] = \exp\left\{\lambda_0 \int_{t=0}^{\infty}\left[\exp\left(\frac{iU_0}{\sqrt{R^2 - 4LC^{-1}}}\int_{t'=t}^{\infty}[p_1 e^{p_1(t'-t)} - p_2 e^{p_2(t'-t)}]\,\lambda(t')\,\mathrm{d}t'\right) - 1\right]\mathrm{d}t\right\}. \qquad (2.30)$$

Setzt man hier für $\lambda(t) = \mu\,\delta(t - t_1)$, so erhält man die einfache charakteristische Funktion des Stromes zu

$$\varphi_J\begin{bmatrix}\mu \\ t_1\end{bmatrix} = \exp\left\{\lambda_0 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i\mu U_0}{\sqrt{R^2 - 4LC^{-1}}}\right)^k I_k(t_1)\right\}$$

$$\text{mit } I_k(t_1) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l} p_1^{k-l} p_2^{l}\,\frac{\exp[l p_2 + (k-l) p_1] - 1}{l p_2 + (k-l) p_1}. \qquad (2.31)$$

Die einfache Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte

$$f_J\begin{pmatrix}J_1 \\ t_1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-i\mu J_1}\,\varphi_J\begin{bmatrix}\mu \\ t_1\end{bmatrix}\mathrm{d}\mu \qquad (2.32)$$

läßt sich damit wegen (2.31) grundsätzlich berechnen. Die praktische Auswertung von (2.32) mit (2.31) scheint nicht einfach zu sein. Wir beschränken und hier auf eine asymptotische Entwicklung von (2.32) für $t_1 \to \infty$ und $\lambda_0 \to \infty$. Wird die mittlere Anzahl λ_0 der Spannungsstöße pro Sekunde sehr groß, so ist zu erwarten, daß sich für $t_1 \to \infty$ (zentraler Grenzwertsatz) näherungsweise eine Normalverteilung einstellt. Man erhält in diesem Fall[18]

$$f_J\begin{pmatrix}J \\ \infty\end{pmatrix} = \frac{1}{U_0}\sqrt{\frac{R}{\pi\lambda_0 L}}\exp\left\{-\frac{RJ^2}{\lambda_0 L U_0^2}\right\}\cdot\left\{1 - \frac{\sqrt{2}\,R^3 J}{3\lambda_0 U_0 L_4 (R^2 - 4LC^{-1})}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{3 + 2R^2C/L}\right)\left(-3 + \frac{RJ^2}{\lambda_0 L U_0^2}\right) + O(\lambda_0^{-2})\ldots\right\}.$$

Die Breite dieser Verteilung

$$\sigma_J^2(\infty) = \tfrac{1}{2}\lambda_0 U_0^2 L/R$$

[17] Siehe auch [11], S. 439.

[18] Siehe [11], S. 270 f.

hängt von der Kapazität C nicht explizit sondern nur inplizit ($R^2 > 4LC^{-1}$) ab. Die Breite $\sigma_J^2(\infty)$ ist um so größer, je dichter die einzelnen Spannungsstöße im Mittel liegen und je größer der einzelne Spannungsstoß ist. Sie ist umso kleiner, je stärker der Schwingkreis gedämpft ist. Für sehr großes R, d.h. für $R^2 \gg 4LC^{-1}$ und $LR^{-1} \to 0$ und $\lambda_0 \to \infty$ folgt aus (2.32) unmittelbar

$$f_J\left(\tfrac{J}{\infty}\right) = \delta\left(J - \lambda_0 \frac{V_0}{R}\right);$$

d.h. der Strom hat mit Wahrscheinlichkeit 1 seinen durch das Ohmsche Gesetz bestimmten Wert.

Der statistische Mittelwert und die Korrelationsfunktion des Stromes lassen sich aus (2.25) und (2.27) oder über die 1- bzw. 2-charakteristische Funktion von $J(t)$ berechnen. Man erhält

$$E_J(t) = \frac{\lambda_0 U_0}{\sqrt{R^2 - 4LC^{-1}}}\{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\}, \quad R_J(t_1, t_2) = E_J(t_1)\, E_J(t_2) + \frac{\lambda_0 U_0}{R^2 - 4LC^{-1}} \cdot \left\{ \frac{p_2}{2}\left(e^{p_2(t_1+t_2)} - e^{p_2(t_2-t_1)}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{p_1}{2}\left(e^{p_1(t_1+t_2)} - e^{p_1(t_2-t_1)}\right) - \frac{1}{RC}\left(e^{p_2(t_2-t_1)} - e^{p_1 t_1 + p_2 t_2} + e^{p_1(t_2-t_1)} - e^{p_2 t_1 + p_1 t_2}\right)\right\}, \quad (t_1 \leqq t_2).$$

Im asymptotischen Bereich ($t_2 = t_1 + \tau$, $t_1 \to \infty$) gilt:

$$E_J(t) = 0, \qquad R_J(\tau) = \frac{\lambda_0 U_0^2}{R^2 - 4LC^{-1}}\left\{-\frac{p_2}{2}e^{p_2\tau} - \frac{p_1}{2}e^{p_1\tau} - \frac{1}{RC}\left(e^{p_2\tau} + e^{p_1\tau}\right)\right\}.$$

Der Prozeß ist als asymptotisch stationär. Für $R \to \infty$ (d.h. $R^2 \gg 4LC^{-1}$, $LR^{-1} \to 0$) gilt wegen $p_1 \to -R/L$, $P_2 \to 1/RC$:

$$R_J(\tau) = \frac{\lambda_0 U_0^2}{2LR}\exp\left\{-\frac{R}{L}\tau\right\}.$$

In diesem Fall strebt also der Prozeß $J(t)$ dem "Weißen Rauschen" zu. Die Intensität dieses Rauschens ist umso größer, je größer die mittlere Zahl von Spannungsstößen pro Sekunde und je größer der einzelne Spannungsstoß ist.

3. LPT von vektorwertigen stochastischen Prozessen

Der in (I, 1) entwickelte Begriff der LPT eines skalaren stochastischen Prozesses läßt sich in einfacher Weise auf vektorwertige stochastische Prozesse[19] mit endlicher Komponentenzahl n verallgemeinern. Dazu brauchen wir zunächst den Begriff der Vektorwertigen Linear Passiven Transformation (VLPT)[20]. Diese ist ganz analog zur skalaren LPT in (I, 1) definiert, nur bedeuten jetzt $f(t)$ bzw. $g(t)$ nicht skalare Funktionen sondern Vektoren, deren Komponenten Funktionen aus $C^{(j)}$ bzw. $C^{(0)}$ sind. Die Passivitätsbedingung lautet jetzt

$$\operatorname{Re} = \int_{-\infty}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} f_i^*(t)\, g_i(t)\, \mathrm{d}t \geqq 0 \quad \text{für alle } \tau. \tag{3.1}$$

Entsteht der Vektor $\boldsymbol{g}(t)$ durch eine VLPT aus $\boldsymbol{f}(t)$, so schreibt man

$$\boldsymbol{g}(t) = \mathfrak{L}_j(t)\boldsymbol{f}(t),$$

bzw. für die einzelne Komponente

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)\, f_k(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Aus den allgemeinen Eigenschaften der VLPT (Bereichspostulat, Linearität, Zeittranslationsinvarianz, Passivität) läßt sich eine explizite Darstellung der Operatoren $\mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)$ ableiten.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0^{(i,k)} f_k(t) = {} & [i\,\alpha_{ik} - \dot{P}_{ik}(+0)] \\ & + \int_{s=0}^{\infty} \mathrm{d}s\, [B_{ik} + P_{ik}(s) - \ddot{P}_{ik}(s)]\, f_k(t-s) \\ & \text{für} \quad f_k(t) \in C^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.3a}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1^{(ik)} f_k(t) = {} & i\,\alpha_{ik} f_k(t) + A_{ik} \dot{f}_k(t) \\ & + \int_0^{\infty} \mathrm{d}s [B_{ik} + P_{ik}(s)]\, f_k(t-s) \\ & + \int_0^{\infty} \mathrm{d}s\, \dot{P}_{ik}(s)\, \dot{f}_k(t-s) \\ & \text{für} \quad f_k(t) \in C^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.3b}$$

[19] Siehe z.B. [8], S. 284.

[20] J. Meixner, Arch. Rat. Mech. Anal. **17**, 278 [1964], S. 292 f.

$$\mathfrak{L}_2^{(i,k)} f_k(t) = i\,\alpha_{ik} f_k(t) + A_{ik} \dot{f}_k(t) + \int_0^\infty [B_{ik} + P_{ik}(s)]\, f_k(t-s)\, ds + \int_0^\infty ds\, [P_{ik}(0) - P_{ik}(s)]\, \ddot{f}_k(t-s) \quad \text{für} \quad f_k(t) \in C^{(2)}\,. \tag{3.3c}$$

Dabei ist (α_{ik}) eine hermitesche Matrix. Die Matrizen (A_{ik}), (B_{ik}) sind hermiteisch und besitzen nicht negativ definite quadratische Formen. Die Matrix $[P_{ik}(s)]$ heißt charakteristische Matrix der VLPT. Die Funktion

$$P(s) = \sum_{i,k=1}^{n} \xi_i^* \, P_{ik}(s)\, \xi_k$$

ist für alle Vektoren (ξ_i) eine positiv definite Funktion. Die Funktionen $P_{ik}(s)$ besitzen mindestens $(2-j)$ viele in $0 < s < \infty$ stetige Ableitungen. Die Transformation $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{g}$ ist umkehrbar eindeutig, wenn die Determinante der Admittanzmatrix $[Y_{ik}(p)]$ (s. Anhang C) für mindestens einen Wert von p mit $\operatorname{Re} p > 0$ von Null verschieden ist. Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Transformation der Gestalt (3.3a, b, c) deren Elemente $\alpha_{ik} \ldots P_{ik}(s)$ die oben erwähnten Eigenschaften haben, eine VLPT ist. Ist der Vektor $\boldsymbol{g}$ für reelle $\boldsymbol{f}$ stets reell, so nennt man die VLPT $\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{g}$ reell. Ganz analog zu der in (I, 1a, b) gegebenen Definition des strengen bzw. gewöhnlichen LPPSP lassen sich nun die Begriffe des strengen bzw. gewöhnlichen linear passiven Paares vektorwertiger Systeme definieren:

a) Definition der *strengen* LPT eines vektorwertigen stochastischen Prozesses.

Gegeben sei ein vektorwertiger stochastischer Prozeß

$$\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t) \ldots x_n(t)\}$$

definiert über einen Wahrscheinlichkeitsraum $\mathfrak{E}$. Ferner gelte

$$x_i(\zeta, t) \in C^{(j)} \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n, \zeta \in \Omega \tag{3.4}$$

und

$$E_{x_i}(t),\ R_{x_i, x_k}(t_1, t_2) \in C^{(j)} \quad \text{für alle } i, k = 1, \ldots, n\,. \tag{3.5}$$

Gegeben sei ferner eine vektorwertige LPT durch ihre Operatoren $\mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)$. Dann bezeichnet man den Prozeß

$$\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t) \ldots y_n(t))$$

mit den Realisierungen

$$y_i(\zeta, t) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)\, x_k(\zeta, t) \tag{3.6}$$

als den zu $\boldsymbol{x}(t)$ in Strenge linear passiv transformierten Prozeß. Wegen der stets vorausgesetzten Vertauschbarkeit des Operators der statistischen Mittelbildung und den Operatoren $\mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)$ gelten zwischen Mittelwert und Korrelationsfunktion der Prozesse $\boldsymbol{x}(t)$ und $\boldsymbol{y}(t)$ folgende Beziehungen:

$$E_{y_i}(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)\, E_{x_k}(t)\,, \tag{3.7a}$$

$$R_{x_i y_k}(t_1, t_2) = \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{L}_j^{*(k,r)}(t_2)\, R_{x_i, x_r}(t_1, t_2)\,, \tag{3.7b}$$

$$R_{y_i y_k}(t_1, t_2) = \sum_{r,s=1}^{n} \mathfrak{L}_j^{(i,s)}(t_1)\, \mathfrak{L}_j^{*(k,r)}(t_2)\, R_{x_s x_r}(t_1, t_2)\,. \tag{3.7c}$$

b) Definition der gewöhnlichen LPT eines vektorwertigen stochastischen Prozesses. Genügt der zu transformierende Prozeß $\boldsymbol{x}(t)$ nur der Bedingung (3.5), nicht aber (3.4), so kann ihm mit Hilfe eines linear passiven Operators $\mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t)$ und der Beziehungen (3.7a, b, c) ein stochastischer Prozeß $\boldsymbol{y}(t)$ zugeordnet werden. Wie bei skalaren Prozessen (siehe I, 1b) kann man zeigen, daß es tatsächlich einen vektorwertigen stochastischen Prozeß über $\mathfrak{E}$ gibt, dessen Erwartungswerte und Korrelationsfunktionen gerade durch (3.7a, b, c) gegeben sind. Die Transformation $x(\zeta, t) \to y(\zeta, t)$ ist mit Wahrscheinlichkeit 1 kausal, linear und zeitverschiebungsinvariant, aber nicht unbedingt mehr passiv[21]. Stets gelten aber analog zu (I, 1.9) bzw. (I, 1.10) eine Passivitätseigenschaft der Mittelwerte

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}^*(t)\, E_{y_i}(t)\, dt \geqq 0\,, \quad i = 1 \ldots n \quad \text{für alle } \tau\,. \tag{3.8}$$

bzw. eine mittlere Passivität

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\tau} \sum_{i,k=1}^{n} R_{x_i y_k}(t, t)\, dt \geqq 0 \quad \text{für alle } \tau\,. \tag{3.9}$$

(3.8) folgt aus (3.7a), (3.9) aus (3.7b) mit (3.3). Man kann nun mit Hilfe der Theorie der VLPT — ganz analog wie in der skalaren Theorie — Aussagen über die Statistik des vektorwertigen Prozesses $\boldsymbol{y}(t)$ machen. Wir beschränken uns hier auf die Formulierung der zu den Sätzen (I, 2, B 1) und (I, 2, C 1) entsprechenden Sätze über die Grenzwerte von Mittelwert und Streuung des transformierten vektorwertigen Prozesse $\boldsymbol{y}(t)$.

[21] Die Funktionen $x_i(\zeta, t)$ bzw. $y_i(\zeta, t)$ brauchen nicht mehr integrierbar zu sein.

1) V_1: $E_{x_i}(t) \in C^{(j)}$, $E_{x_i}(t) = 0$ für $t \geqq t_0$, $j = 0, 1, 2$.

V_2: $\lim\limits_{s\to\infty} P_{ik}^{(l)}(s) = 0$ für $l = 0, 1, \ldots, 2-j$, $i, k = 1, \ldots, n$.

A:
$$\lim_{t\to\infty} E_{y_i}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t_0} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} E_{x_k}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

B: Siehe Satz (I, 2, B 1).

V_2 ist für A nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

2) V_1: $R^0_{x_i x_k}(t, t') \in C^{(j)}$, $R^0_{x_i x_k}(t, t') = 0$ wenn $t \geqq t_0$ oder $t' \geqq t_0$ für alle $i, k = 1, \ldots, n$.

V_2: $\lim\limits_{s\to\infty} P_{ik}^{(e)}(s) = 0$ für $l = 0, 1, \ldots, 2-j$, $i, k = 1, \ldots, n$.

A:
$$\lim_{t\to\infty} \sigma^2_{y_i}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t_0} \mathrm{d}t \int\limits_{-\infty}^{t_0} \mathrm{d}t' \sum_{k,l=1}^{n} B_{ik} B^*_{il} R^0_{x_k x_l}(t, t'), \tag{3.11}$$

B: Siehe Satz (I, 2, B 1).

Auch der in Kap. 1, Abschnitt B angegebene Satz über das C.F. des transformierten Prozesses läßt sich unmittelbar für vektorwertige Systeme formulieren: Für strenge VLPT gilt:

V_1: $x_i(\zeta, t) \in C^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, 2$.

V_2: $\lambda_i(t) \in S^{(j)}_+$,

V_3:
$$\varkappa_{r_1 \ldots r_n, x_1 \ldots x_n}(\zeta) = \exp i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \sum_{i}^{n} r_i(t)\, x_i(\zeta, t) \text{ meßbar über } \mathfrak{E}$$
für alle $r_i(t) \in D^{(0)}_+$, $i = 1, \ldots, n$.

Das heißt das C.F. $\varphi_{\boldsymbol{x}}[r_1(t), \ldots, r_n(t)]$ des Prozesses $\boldsymbol{x}(t)$ existiert für alle $r_i(t) \in D^{(0)}_+$.

A_1:
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i(t)\, \mathfrak{L}^{(i,k)}_j(t)\, x_n(\zeta, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \sum_{i,k=1}^{n} [\overline{\mathfrak{L}}^{(i,k)}_j \lambda_i(t)]\, x_k(\zeta, t);$$

A_2: $\varphi_{\boldsymbol{y}}[\lambda_1(t) \ldots \lambda_n(t)]$ … existiert für alle $\lambda_i(t) \in S^{(j)}_+$ und es gilt
$$\varphi_{\boldsymbol{y}}[\lambda_1(t) \ldots \lambda_n(t)] = \varphi_{\boldsymbol{x}}\Big[\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{L}}^{(i,1)}_j(t)\, \lambda_i(t) \ldots \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{L}}^{(i,n)}_j(t)\, \lambda_i(t)\Big]. \tag{3.12}$$

Die Operatoren $\overline{\mathfrak{L}}^{(i,k)}_j(t)$ ergeben sich aus den Operatoren $\mathfrak{L}^{(i,k)}_j(t)$ dabei einfach dadurch, daß man in letzteren $A_{ik} \to -A_{ik}$ und in den Integralen anstelle der Funktionen $f_k(t-s) \to f_k(t+s)$ setzt. Der Beweis dieses Satzes kann fast genauso wie im skalaren Fall geführt werden, wenn man zusätzlich einige Eigenschaften der charakteristischen Matrix beachtet (s. Anhang C). Gelten neben V_1—V_3 noch die zusätzlichen Voraussetzungen

V_4: $\varkappa_{r_1 \ldots r_n, x_1 \ldots x_n}(\zeta)$ … meßbar über $\mathfrak{E}$ für alle
$$r_i(t) = \sum_{m_i=1}^{s_i} \mu_{i,m_i}\, \delta(t - t_{i,m_i}); \quad i = 1, \ldots, n.$$

V_5:
$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\Big[\sum_{m_1=1}^{s_1} \mu_{1,m_1}\, \delta(t - t_{1,m_1}) \ldots \sum_{m_n=1}^{s_n} \mu_{n,m_n}\, \delta(t - t_{n,m_n})\Big] \in \prod_{i=1}^{n} \prod_{m_n=1}^{s_i} L^{(1)}(\mu_{(i,k)}),$$

so kann man mit Hilfe von (3.12) die simultanen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Prozesses $\boldsymbol{y}(t)$ aus dem C.F. $\varphi_{\boldsymbol{x}}$ und den Operatoren $\mathfrak{L}^{(i,k)}_j(t)$ berechnen:

$$f_y\begin{pmatrix} y_{1,1} \ldots y_{1,s_1} \ldots y_{n,1} \ldots y_{n,s_n} \\ t_{1,1} \ldots t_{1,s_1} \ldots t_{n,1} \ldots t_{n,s_n} \end{pmatrix} = (2\pi)^{-\sum\limits_{k=1}^{n} s_k} \int\limits_{\mu_{11}=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{11} \ldots \int\limits_{\mu_{1s_1}=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{1s_1} \ldots \int\limits_{\mu_{n1}=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{n1} \ldots \int\limits_{\mu_{n,s_n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{n,s_n} \cdot \left(\exp - i \sum_{k=1}^{n} \sum_{m_k=1}^{s_k} \mu_{km_k} y_{km_k}\right)$$
$$\cdot\, \varphi_x\left[\ldots \sum_{i=1}^{n} \sum_{m_k=1}^{s_k} \mathfrak{L}^{(i,k)}_j(t)\, \mu_{\mu_k m_k}\, \delta(t - t_{km_k}) \ldots\right].$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht zeigen, daß die VLPT von vektorwertigen Gaußschen Prozessen stets wieder auf Gaußsche Prozesse führt. Über eine Anwendung dieses Satzes auf die VLPT eines Poisson-Prozesses mit 2 Komponenten soll an anderer Stelle berichtet werden.

Anhang B

Definition der verwendeten Funktions- und Distributionsräume. Im folgenden bedeuten $\varphi(x)$, $\psi(x)$ … stets komplexwertige Funktionen einer reellen Variablen x definiert für $-\infty < x < \infty$.

$C^{(j)}$ $j = 0, 1, 2$, siehe (I, 1).

$C^{(-1)}$ Raum aller Funktionen $\varphi(x)$ welche eindeutig, im Endlichen beschränkt und stückweise stetig sind und für die gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x)\, x^n = 0 \text{ für alle } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

$\bar{C}^{(j)}$ Raum aller eindeutigen Funktionen $\varphi(x)$ welche j viele stetige Ableitungen besitzen und für welche

$$\dot{\varphi}^{(k)}(x) = 0 \text{ für } k = 0, 1, \ldots, j$$

und $x \leqq x_0[\varphi]$ gilt.

D Raum aller Funktionen $\varphi(x)$ welche einen beschränkten Träger K_φ besitzen. Im Innern von K_φ ist $\varphi(x)$ eindeutig und beliebig oft differenzierbar. Für $x \notin K_\varphi$ gilt $\varphi(x) = 0$ (Testfunktionen).

D' Raum aller Distributionen definiert über D.

$D_+, (D_-)$ Raum aller Funktionen $\varphi(x) \in E$ deren Träger von rechts (links) beschränkt ist.

$D'_+, (D'_-)$ Raum aller Distributionen, deren Träger von links (rechts) beschränkt ist.

$D_+^{(j)}, (D_-^{(j)})$ Raum aller Funktionen $\psi(x)$ deren Träger K_ψ von rechts (links) beschränkt ist. Im Innern von K_ψ ist $\psi(x)$ eindeutig beschränkt und hat j viele stetige Ableitungen.

E Raum aller Funktionen $\varphi(x)$ welche beliebige Träger K_φ besitzen. Im Innern von K_φ ist $\varphi(x)$ eindeutig und beliebig oft differenzierbar.

E' Raum aller Distributionen T mit beschränktem Träger K'_T. Das heißt es gilt für genügend kleines $\varepsilon > 0$ und alle $x_0 \notin K'_T$: $\langle T(x), \varphi_{x_0 \varepsilon}(x)\rangle = 0$. Dabei ist $\varphi_{x_0, \varepsilon} \in D$ mit $\varphi_{x_0, \varepsilon}(x) = 0$ für $|x - x_0| > \varepsilon$.

S Raum aller Funktionen $\varphi(x)$ welche eindeutig, beliebig oft differenzierbar sind und für welche $\lim_{|x| \to \infty} x^n \psi^{(m)}(x) = 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. (Grundfunktionen.)

S' Raum aller Distributionen definiert über S (Temperierte Distributionen).

$S_+^{(j)}, (S_-^{(j)})$ Raum aller Funktionen $\psi(x)$ deren Träger K_ψ von rechts (links) beschränkt ist. Im Innern von K_ψ ist $\psi(x)$ eindeutig, hat j viele stetige Ableitungen und es gilt $\lim_{x \to -\infty} x^n \dot{\psi}^{(m)}(x) = 0$, $(\lim_{x \to \infty} x^n \dot{\psi}^{(m)}(x) = 0)$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, \ldots, j$.

$L^{(1)}$ Raum aller absolut integrierbaren Funktionen.

M Raum aller Funktionen, welche eindeutig, stückweise stetig und beschränkt sind.

δ Distribution: $\langle \delta(s-t), \varphi(s)\rangle = \langle \delta(s), \varphi(s+t)\rangle = \varphi(t) \in D$.

τ_t Zeittranslationsoperator: $\langle \tau_t T(s), \varphi(s)\rangle = \langle T(s), \varphi(s+t)\rangle$.

$$E(s) = \begin{cases} 1 \ldots s > 0 \\ 0 \ldots s \leqq 0 \end{cases} \quad \text{Einheitssprung.}$$

Anhang C

Jedem linear passiven Matrixoperator $\mathfrak{L}_j^{(i,k)}(t) \neq 0$ kann umkehrbar eindeutig eine positive bzw. semipositive Matrix $Y_{ik}(p)$ zugeordnet werden[20]. Das heißt, daß für alle konstante Vektoren (ξ_i) die Funktion

$$Y(p) = \sum_{ik}^{n} \xi_i^* \, Y_{ik}(p)\, \xi_k$$

eine positive Funktion oder identisch Null ist. Für $Y_{ik}(p)$ gilt für $\operatorname{Re} p > 0$ folgende Darstellung

$$Y_{ik}(p) = i\,\alpha_{ik} + A_{ik}\, p + \frac{B_{ik}}{p} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - i p \varrho}{p - i \varrho}\, d\Phi_{ik}(\varrho)\,. \quad \text{(C.1)}$$

Es gilt

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2i}\left(Y_{ik}(1) - Y_{ki}^*(1)\right), \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}^*,$$

$$\left.\begin{aligned} & A_{ik} = A_{ki}^*, \quad B_{ik} = B_{ki}^*, \\ & \sum_{ki}^{n} \xi_i^* A_{ik}\, \xi_k \geqq 0, \quad \sum_{ki} \xi_i^* B_{ik}\, \xi_k \geqq 0, \\ & \Phi_{ik}(\varrho) = \Phi_{ki}^*(\varrho)\,. \end{aligned}\right\} \quad \text{(C.2)}$$

Die Funktionen $Y_{ik}(p)$ mit $i \neq k$ sind holomorphe Funktionen in $\operatorname{Re} p > 0$. Die Funktionen $Y_{ii}(p)$ sind positive Funktionen in $\operatorname{Re} p > 0$. Ferner ist die Funktion

$$\Phi(\varrho) = \sum_{ik} \xi_i^* \, \Phi_{ik}(\varrho)\, \xi_k$$

für alle Vektoren (ξ_i) eine Spektralfunktion (I; Anhang A). Die charakteristische Matrix $P_{ik}(S)$ ergibt sich aus $\Phi_{ik}(\varrho)$ gemäß

$$P_{ik}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\varrho}\,\mathrm{d}\Phi_{ik}(\varrho)\,, \tag{C.3}$$

und es gilt

$$P_{ik}(s) = P_{ki}^{*}(-s)\,.$$

Ferner gilt analog zu (I; A.5)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{ik}^{n} \xi_i^{*}\, P_{ik}(s)\, \xi_k\,\mathrm{d}s = 0\,. \tag{C.4}$$

Aus (C.1) und (C.3) folgt eine 2. Darstellung der Admittanzmatrix $Y_{ik}(p)$ gültig für $\operatorname{Re} p > 0$

$$Y_{ik}(p) = i\,\alpha_{ik} + A_{ik}\,p + \frac{B_{ik}}{P} + \int_0^{\infty} e^{-pt}\, P_{ik}(t)\,dt + {} + p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt}\,[P_{ik}(0) - P_{ik}(t)]\,\mathrm{d}t\,. \tag{C.5}$$

Für reelle VLPT gelten außer (C.2) noch die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{ik} = 0\,, \quad A_{ik} = A_{ki}\,, \quad B_{ik} = B_{ki} \\ P_{ik}(s) = P_{ki}(-s) \end{array}\right\} \ldots \text{reell.}$$

Druchfehlerberichtigung zu (I) (Z. Naturforsch. **23 a**, 1430 [1968]).

Satz (I; 2, C 2) (p. 1437 links oben) lautet richtig:

V_1: $R_0^x(t_1, t_2) \in C^{(j)}$,

V_2: $\int_{-\infty}^{\infty} |{}^{(i)}R_x^{0(k)}(t,t')|\,\mathrm{d}t < \infty$,

$\iint_{-\infty}^{\infty} |{}^{(i)}R_x^{0(k)}(t,t')|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' < \infty$

für alle $i, k = 0, 1, \ldots, j$.

Alle Integrale müssen gleichmäßig bezüglich t' konvergieren.

V_3: V_2 von Satz C 1.

A: $\lim_{t\to\infty} \sigma_y^2(t) = b^2 \iint_{-\infty}^{\infty} R_x^0(t,t')\,dt\,\mathrm{d}t'$.

B: Nach Verwendung von (2.3) ganz analog zu dem von Satz B 3 in [3] gegebenen Beweis durchführbar.